Hitung-hitungan tentunya sangat penting untuk kita ketahui, entah yang bersifat spontanitas maupun ilmiah. Kita dari semenjak Tk telah diajarkan bagaimana agar kita selalu memiliki sikap ingin tahu dan penting sekali hitung-hitungan kita pelajari.

Pada artikel yang satu ini, kami suguhkan tentang Induksi Matematika. Disini menemukan banyak informasi yang terdapat pada buku Kemendikbud RI keluaran resmi dari pemerintah.

Materi Matematika Kelas 11 Bab 1 Induksi Matematika

1.1 Pengantar Induksi Matematika

Masalah

Tanpa menggunakan alat bantu hitung, rancang formula yang memenuhi pola penjumlahan bilangan mulai 1 hingga 20. Kemudian, uji kebenaran formula yang ditemukan sedemikian sehingga berlaku untuk penjumlahan bilangan mulai dari 1 hingga n, dengan n bilangan asli.

Alternatif Penyelesaian

a. Pola yang terdapat pada, yaitu:

• Selisih dua bilangan yang berurutan selalu sama yaitu 1.

• Hasil (1 + 20) = (2 +19) = (3 + 18) = (4 + 17) = . . . = (10 +11) = 21.

Artinya terdapat sebanyak 10 pasang bilangan yang jumlahnya sama dengan 21.

Jadi hasil 1 + 2 + 3 + . . . + 18 + 19 + 20 = (20/2) .21 = 210.

b. Untuk mengetahui pola yang terdapat pada 1 + 2 + 3 + . . . + n, untuk n bilangan asli, perlu dipilih sebarang $n > 20$. Misalnya kita pilih $n = 200$. Sekarang, kita akan menyelidiki apakah pola yang terdapat pada 1 + 2 + 3 + . . . + 18 + 19 + 20 berlaku pada 1 + 2 + 3 + . . . + 198 + 199 + 200?

• Selisih dua bilangan yang berurutan selalu sama yaitu 1.

• Hasil (1 + 200) = (2 +199) = (3 + 198) = (4 + 197) = . . . = (100 +101) = 201.

• Artinya terdapat sebanyak 100 pasang bilangan yang jumlahnya sama dengan 201.

Jadi hasil 1 + 2 + 3 + . . . + 198 + 199 + 200 = (200/2).201 = 20.100

Dengan demikian untuk sebarang n bilangan asli yang genap, kamu dapat menentukan jumlah bilangan berurutan mulai dari 1 hingga n.

1.2 Prinsip Induksi Matematika

Contoh

Buktikan dengan induksi matematika bahwa jumlah n bilangan ganjil positif yang pertama sama dengan $n2$.

Alternatif Penyelesaian

Tentu kamu mengetahui pola bilangan ganjil positif, yaitu: $2n – 1$, untuk n bilangan asli.

Sedemikian sehingga akan ditunjukkan bahwa:

$1 + 3 + 5 + 7 + . . . + (2n – 1) = n^2$.

Sebut, $P(n) = 1 + 3 + 5 + 7 + . . . + (2n – 1) = n^2$.

Untuk membuktikan kebenaran formula $P(n)$, kita harus menyelidiki apakah $P(n)$ memenuhi prinsip induksi matematika, yaitu langkah awal dan langkah induksi.

a) Langkah awal:

Untuk $n = 1$, maka $P(1) = 1 = 1^2 = 1$.

Jadi $P(1)$ benar.

b) Langkah Induksi:

Karena $P(1)$ benar, maka $P(2)$ juga benar, hingga dapat diperoleh untuk $n = k$,

$P(k) = 1 + 3 + 5 + 7 + . . . + (2k – 1) = k^2$ juga benar, untuk setiap k bilangan asli.

Akan ditunjukkan untuk bahwa untuk $n = k + 1$, sedemikian sehingga

$P(k + 1) = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2(k + 1) – 1) = (k + 1)^2$ adalah suatu pernyataan yang benar.

Karena $P(k) = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k – 1) = k2$ adalah pernyataan yang benar, maka

$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k – 1) = k^2$

Jika kedua ruas ditambahkan dengan $(2k + 1)$, akibatnya

$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k – 1) + (2k + 1) = k2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$.

Jadi, dengan $P(k)$ ditemukan $P(k + 1)$.

Dengan demikian terbukti bahwa: $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n – 1) = n^2$ adalah benar, untuk setiap n bilangan asli.

Karena formula $P(n) = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n – 1) = n^2$, memenuhi kedua prinsip induksi matematika, maka jumlah n bilangan ganjil positif yang pertama sama dengan n^2 adalah benar, dengan n bilangan asli.

1.3 Bentuk-Bentuk Penerapan Induksi Matematika

1.3.1 Penerapan Induksi Matematika pada Barisan Bilangan

Masalah

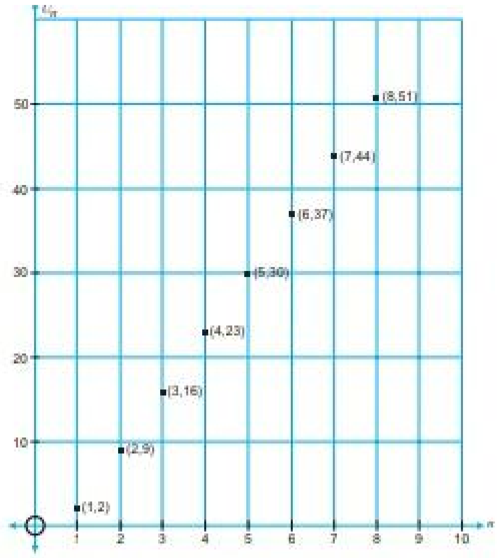
Misalkan ui menyatakan suku ke i suatu barisan bilangan asli, dengan $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Diberikan barisan bilangan asli, 2, 9, 16, 23, 30, 37, 44, 51, ...

Rancang suatu formula untuk menghitung suku ke 1.000 barisan bilangan tersebut. Ujilah kebenaran formula yang diperoleh dengan menggunakan induksi matematika.

Alternatif Penyelesaian

Terlebih dahulu kita mengkaji barisan bilangan asli yang diberikan, bahwa untuk $n = 1$ maka $u_1 = 2$; untuk $n = 2$ maka $u_2 = 9$; untuk $n = 3$ maka $u_3 = 16$; demikian seterusnya. Artinya kita harus merancang suatu formula sedemikian sehingga formula tersebut dapat menentukan semua suku-suku barisan bilangan tersebut. Mari kita telaah hubungan antara *n* dengan sukusuku barisan bilangan 2, 9, 16, 23, 30, 37, 44, 51, . . . yang dideskripsikan pada Gambar 1.3.



Gambar 1.3. Sebaran titik yang dibentuk oleh *n* dengan suku-suku barisan 2, 9, 16, 23, 30, 37, 44, 51, ...

1.3.2 Penerapan Induksi Matematika pada Keterbagian

Contoh

Dengan induksi matematika, tunjukkan bahwa $11^n - 6$ habis dibagi 5, untuk n bilangan asli.

Alternatif Penyelesaian

Kita misalkan $P(n) = 11^n - 6$, dengan n bilangan asli.

Pada contoh ini kita harus menunjukkan bahwa $11^n - 6$ dapat dituliskan sebagai bilangan kelipatan 5. Akan ditunjukkan bahwa $P(n)$ memenuhi kedua prinsip induksi matematika.

a) Langkah Awal

Kita dapat memilih $n = 3$, sedemikian sehingga, $11^3 - 6 = 1.325$ dan 1.325 habis dibagi 5, yaitu 1.325 = 5(265).

Dengan demikian $P(3)$ habis dibagi 5.

b) Langakah Induksi

Karena $P(3)$ benar, maka $P(4)$ benar, sedemikian sehingga disimpulkan $P(k) = 11k – 6$ benar, untuk k bilangan asli. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa jika $P(k) = 11^{k} – 6$ habis dibagi 5, maka $P(k + 1) = 11^{(k + 1)} – 6$ habis dibagi 5.

Karena $11^{k} – 6$ habis dibagi 5, maka dapat kita misalkan $11^{k} – 6 = 5m$, untuk m bilangan bulat positif. Akibatnya, $11k = 5m + 6$.

Bentuk $11^{k} + 1 – 6 = 11k(11) – 6$,

$= (5m + 6)(11) – 6$ (karena $11k = 5m + 6$)

$= 55m + 60$

$= 5(11m + 12)$.

Dengan demikian $P(k + 1) = 11^{(k + 1)} – 6$ dapat dinyatakan sebagai kelipatan 5, yaitu $5(11m + 12)$.

Jadi benar bahwa $P(k + 1) = 11^{(k + 1)} – 6$ habis dibagi 5.

Karena $P(n) = 11^{n} – 6$ memenuhi kedua prinsip induksi matematika, maka

terbukti $P(n) = 11^{n} – 6$ habis dibagi 5, untuk n bilangan asli.

Daftar Pustaka :

Sudianto Manullang, Andri Kristianto S., Tri Andri Hutapea, Lasker Pangarapan Sinaga, Bornok Sinaga, Mangaratua Marianus S., Pardomuan N. J. M. Sinambela. 2017. Matematika SMA/MA/SMK/MK Kelas XI. Jakarta : Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemendikbud.

Ringkasan Lanjutan:

1. Ringkasan Materi Matematika SMA Kelas 10,11,12 + PDF!
2. Menganalisis Keterampilan Gerak Aktivitas Jalan, Lari, Lempar, dan Lompat
3. Menganalisis Strategi Pertarungan Bayangan Olahraga Olahraga Beladiri / Pencaksilat
4. Menganalisis Konsep Latihan dan Pengukuran Kebugaran Jasmani Terkait

Keterampilan Gerak