Hitung-hitungan tentunya sangat penting untuk kita ketahui, entah yang bersifat spontanitas maupun ilmiah. Kita dari semenjak Tk telah diajarkan bagaimana agar kita selalu memiliki sikap ingin tahu dan penting sekali hitung-hitungan kita pelajari.

Pada artikel yang satu ini, kami suguhkan tentang matrik. Disini menemukan banyak informasi yang terdapat pada buku Kemendikbud RI keluaran resmi dari pemerintah.

Rangkuman Materi Matematika Matrik

3.1 Membangun Konsep Matriks

Definisi

Matriks adalah susunan bilangan yang diatur menurut aturan baris dan kolom dalam suatu jajaran berbentuk persegi atau persegi panjang. Susunan bilangan itu diletakkan di dalam kurung biasa "( )" atau kurung siku "[ ]".

Contoh

Teguh, siswa kelas IX SMA Panca Budi, akan menyusun anggota keluarganya berdasarkan umur dalam bentuk matriks. Dia memiliki Ayah, dan Ibu, berturut-turut berumur 46 tahun dan 43 tahun. Selain itu dia juga memiliki kakak dan adik, secara berurut, Ningrum (22 tahun), Sekar (19 tahun), dan Wahyu (12 tahun). Dia sendiri berumur 14 tahun.

Berbekal dengan materi yang dia pelajari di sekolah dan kesungguhan dia dalam berlatih, dia mampu mengkreasikan susunan matriks yang merepresentasikan umur anggota keluarga Teguh sebagai berikut (berdasarkan urutan umur dalam keluarga Teguh).

i. Alternatif susunan I

$$T_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 46 & 43 & 22 \\ 19 & 14 & 12 \end{bmatrix}$$

Matriks $T_{2\times 3}$ adalah matriks persegi panjang dengan berordo 2×3.

ii. Alternatif susunan II

$$T_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 46 & 43 \\ 22 & 19 \\ 14 & 12 \end{bmatrix}$$

Matriks $T_{3\times 2}$ adalah matriks persegi panjang berordo 3×2.

3.2 Jenis-Jenis Matriks

a. Matriks Baris

Matriks baris adalah matriks yang terdiri atas satu baris saja. Biasanya, ordo matriks seperti ini adalah $1 \times n$, dengan n banyak kolom pada matriks tersebut.

b. Matriks Kolom

Matriks kolom adalah matriks yang terdiri atas satu kolom saja. Matriks kolom berordo $m \times 1$, dengan m banyak baris pada matriks tersebut.

c. Matriks Persegi Panjang

Matriks persegi panjang adalah matriks yang banyak barisnya tidak sama dengan banyak kolomnya. Matriks seperti ini memiliki ordo $m \times n$.

d. Matriks Persegi

Matriks persegi adalah matriks yang mempunyai banyak baris dan kolom sama. Matriks ini memiliki ordo $n \times n$.

e. Matriks Segitiga

Mari kita perhatikan matriks F berordo 4×4. Terdapat pola susunan pada suatu matriks persegi,

f. Matriks Diagonal

Dengan memperhatikan konsep pada matriks segitiga di atas, jika kita cermati kombinasi pola tersebut pada suatu matriks pesegi.

g. Matriks Identitas

Mari kita cermati kembali matriks persegi dengan pola.

h. Matriks Nol

Jika entry suatu matriks semuanya bernilai nol, maka disebut matriks nol.

3.3 Kesamaan Dua Matriks

Definisi

Matriks A dan matriks B dikatakan sama ($A = B$) jika dan hanya jika:

i. Ordo matriks A sama dengan ordo matriks B.

ii. Setiap entry yang seletak pada matriks A dan matriks B mempunyai nilai yang sama, aij = bij (untuk semua nilai i dan j).

Contoh

Tentukanlah nilai a, b, c, dan d yang memenuhi matriks $Pt = Q$, dengan

$$P = \begin{bmatrix} 2a-4 & 3b \\ d+2a & 2c \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \text{ dan } Q = \begin{bmatrix} b-5 & 3a-c & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Alternatif Penyelesaian

Karena P merupakan matriks berordo 2 × 3, maka Pt merupakan matriks berordo 2 × 3. Matriks Q merupakan matriks berordo 2 × 3. Oleh karena itu berlaku kesamaan matriks Pt = Q.

Dengan $P^t = \begin{bmatrix} 2a-4 & d+2a & 4 \\ 3b & 2c & 7 \end{bmatrix}$. Akibatnya, kesamaan $P^t = Q$ dapat dituliskan:

$$\begin{bmatrix} 2a-4 & d+2a & 4 \\ 3b & 2c & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b-5 & 3a-c & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Dari kesamaan di atas, kita temukan nilai a, b, c, dan d sebagai berikut.

• $3b = 3$ maka $b = 1$, dan $2c = 6$ maka $c = 3$.

• $2a - 4 = -4$ maka $a = 0$.

• Karena $a = 0$ maka $d = -3$.

Jadi, $a = 0$, $b = 1$, $c = 3$, dan $d = -3$.

3.4 Operasi pada Matriks

3.4.1 Operasi Penjumlahan Matriks

Definisi

Misalkan A dan B adalah matriks berordo $m \times n$ dengan entry-entry aij dan b_{ij}. Matriks C adalah jumlah matriks A dan matriks B, ditulis $C = A + B$, apabila matriks C juga berordo $m \times n$ dengan entry-entry ditentukan oleh: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (untuk semua i dan j).

Contoh

a) Jika $P = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, maka

$$P + Q = \begin{bmatrix} 10+2 & 2+2 & 4+8 \\ 1+1 & 3+0 & 5+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

b) Jika diketahui matriks $P = \begin{bmatrix} x & 2 & 4 \\ 1 & x-7 & 5 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 8 \\ 1 & y & 1 \end{bmatrix}$, dan $P + Q = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$. Tentukan nilai x dan y!

Jika dimisalkan $R = P + Q$, maka hasil jumlah matriks P dan Q adalah R $= \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, sementara $P + Q = \begin{bmatrix} x+2 & 2+2 & 4+8 \\ 1+1 & x-7+y & 5+1 \end{bmatrix}$.

Berdasarkan sifat kesamaan dua matriks, maka diperoleh:

$$\begin{bmatrix} x+2 & 2+2 & 4+8 \\ 1+1 & x-7+y & 5+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$x + 2 = 12 \quad \Rightarrow x = 10$

$x - 7 + y = 3 \quad \Rightarrow 10 - 7 + y = 3$ atau $y = 0$

Maka diperoleh nilai x = 10 dan y = 0.

3.4.2 Operasi Pengurangan Matriks

Mari kita cermati contoh berikut ini.

a). Jika $K = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ dan $L = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$, maka

$$K - L = K + (-L) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 \\ -7 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b). Diketahui matriks-matriks X, Y dan Z sebagai berikut.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}, \text{ dan } Z = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{bmatrix}$$

Jika ada, tentukan pengurangan-pengurangan matriks berikut ini.

i) $Y - X$ ii) $Y - Z$ iii) $X - Z$

Alternatif Penyelesaian

Matriks X dan Y memiliki ordo yang sama, yaitu berordo 3×2, sedangkan matriks Z berordo 3×3. Oleh karena itu, menurut aturan pengurangan dua matriks, hanya bagian i) saja yang dapat ditentukan, ii) dan iii) tidak dapat dioperasikan, (kenapa)?

$$\text{Jadi, } Y - X = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -5 & -7 \\ -9 & -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dari pemahaman contoh di atas, pengurangan dua matriks dapat juga dilakukan dengan mengurangkan langsung entry-entry yang seletak dari kedua matriks tersebut, seperti yang berlaku pada penjumlahan dua matriks, yaitu: $A - B = [a_{ij}] - [b_{ij}]$.

3.5 Determinan dan Invers Matriks

3.5.1 Determinan Matriks

Masalah

Siti dan teman-temannya makan di kantin sekolah. Mereka memesan 3 ayam penyet dan 2 gelas es jeruk di kantin sekolahnya. Tak lama kemudian, Beni dan teman-temannya datang memesan 5 porsi ayam penyet dan 3 gelas es jeruk. Siti menantang Amir menentukan harga satu porsi ayam penyet dan harga es jeruk per gelas, jika Siti harus membayar Rp70.000,00 untuk semua pesanannya dan Beni harus membayar Rp115.000,00 untuk semua pesanannya.

Alternatif Penyelesaian

Cara I

Petunjuk: Ingat kembali materi sistem persamaan linear yang sudah kamu pelajari. Buatlah sistem persamaan linear dari masalah tersebut, lalu selesaikan dengan matriks.

Misalkan x = harga ayam penyet per porsi

y = harga es jeruk per gelas

Sistem persamaan linearnya: $3x + 2y = 70.000$
$5x + 3y = 115.000$

Dalam bentuk matriks adalah sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70.000 \\ 115.000 \end{bmatrix} \qquad (3.1)$$

Mengingat kembali bentuk umum persamaan linear.

$$\left.\begin{matrix} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Solusi persamaan tersebut adalah:

$$x = \frac{b_2 \cdot c_1 - b_1 c_2}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1} \text{ dan } y = \frac{a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1},\ a_1.b_2 \neq a_2.b_1 \qquad (3.2)$$

Ingat kembali bagaimana menentukan himpunan penyelesain SPLDV. Tentunya kamu mampu menunjukkannya.

Cara II

Dalam konsep matriks, nilai $(a_1.b_2 - a_2.b_1)$ disebut sebagai determinan matriks $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$, dinotasikan $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ atau det A, dengan matriks $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = A$.

Oleh karena itu, nilai x dan y pada persamaan (3.2), dapat ditulis menjadi:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{ dan } y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad (3.3)$$

dengan $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \neq 0$.

Kembali ke persamaan (3.1), dengan menerapkan persamaan (3.3), maka diperoleh:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 70.000 & 2 \\ 115.000 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{210.000 - 230.000}{9 - 10} = \frac{-20.000}{-1} = 20.000$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 70.000 \\ 5 & 115.000 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{345.000 - 350.000}{9 - 10} = \frac{-5.000}{-1} = 5.000$$

Jadi, harga ayam penyet satu porsi adalah Rp20.000,00 dan harga es jeruk satu gelas adalah Rp5.000,00.

Notasi Determinan

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Determinan dari matriks A dapat dinyatakan

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

3.5.2 Sifat-Sifat Determinan

Sifat

Misalkan matriks A dan B berordo $m \times m$ dengan $m \in N$. Jika det $A = |A|$ dan det $B = |B|$, maka $|AB| = |A|.|B|$

3.5.3 Invers Matriks

Definisi

Misalkan A sebuah matriks persegi dengan ordo $n \times n$, $n \in N$

• Matriks A disebut matriks nonsingular, apabila $det\ A \neq 0$.

• Matriks A disebut matriks singular apabila $det\ A \neq 0$.

• A–1 disebut invers matriks A jika dan hanya jika AA–1 = A–1A = I.

I adalah matriks identitas perkalian matriks.

diperoleh invers matriks A. Dengan rumus:

A^{-1} =1 /det. A x *adj (A)*

3.5.4 Sifat-Sifat Invers Matriks

Sifat

Misalkan matriks A berordo $n \times n$ dengan $n \in N$, det(A) ≠ 0. Jika A^{-1} adalah invers matriks A, maka $(A^{-1})^{-1} = A$.

Misalkan matriks A dan B berordo $n \times n$ dengan $n \in N$, det $A \neq 0$ dan det B ≠ 0. Jika A^{-1} dan B^{-1} adalah invers matriks A dan B, maka $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

Daftar Pustaka :

Sudianto Manullang, Andri Kristianto S., Tri Andri Hutapea, Lasker Pangarapan Sinaga, Bornok Sinaga, Mangaratua Marianus S., Pardomuan N. J. M. Sinambela. 2017. Matematika SMA/MA/SMK/MK Kelas XI. Jakarta : Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemendikbud.

Ringkasan Lanjutan:

1. Materi Matematika Kelas 11 Bab 2 Program Linear
2. Ringkasan Materi Transformasi
3. Ringkasan Materi Peluang
4. Ringkasan Materi Kekongruenan dan Kesebangunan